2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός : $$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

2.

Ιδιότητες

$|\alpha| \geq 0$, $\quad |\alpha| \geq \alpha$, $\quad |\alpha| \geq -\alpha$, $\quad |\alpha|^2 = \alpha^2$, $\quad |-\alpha| = |\alpha|$

$|x| = \theta \iff x = \theta$ ή $x = -\theta$, όπου $\theta > 0$

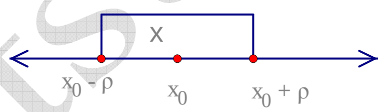
$|x| = |\alpha| \iff x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$, $\quad \left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\quad |\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$

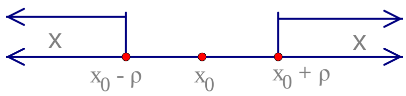
$|x - x_o| < \rho \iff x \in (x_o - \rho,\ x_o + \rho)$

$\iff x_o - \rho < x < x_o + \rho$, όπου $\rho > 0$



$|x - x_o| > \rho \iff x \in (-\infty,\ x_o - \rho) \cup (x_o + \rho,\ +\infty)$

$\iff x < x_o - \rho$ ή $x > x_o + \rho$, όπου $\rho > 0$



ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού α .

Όταν $\alpha > 0$ τότε $|\alpha| = \alpha$

Όταν $\alpha < 0$ τότε $|\alpha| = -\alpha$

Όταν $\alpha = 0$ τότε $|\alpha| = 0$, δηλαδή $|0| = 0$

2.

Η σχέση των αριθμών α και $|\alpha|$

Οι αριθμοί α και $|\alpha|$ είναι ξεχωριστοί αριθμοί .

Άλλοτε είναι ίσοι και άλλοτε αντίθετοι

Είναι ίσοι , όταν $\alpha \geq 0$ και αντίθετοι όταν $\alpha < 0$

3.

Απόσταση αριθμού α από το 0.

$d(\alpha, 0) = |\alpha - 0| = |\alpha|$

4.

Προσοχή

i) Αν $\alpha \neq 0$, τότε $|\alpha| \neq 0$ και μάλιστα $|\alpha| > 0$

ii) $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

iii) $|\alpha| = \theta \Leftrightarrow \alpha = \theta$ **Λάθος !**

Το σωστό είναι $|\alpha| = \theta \Leftrightarrow \alpha = \theta$ ή $\alpha = -\theta$

iv) $|x| < \theta \Leftrightarrow x < \theta$ **Λάθος !**

Το σωστό είναι $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

v) $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ **Λάθος !**

Το σωστό είναι $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$

vi) $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ **Λάθος !**

Το σωστό είναι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

vii) $-|-\alpha| = |\alpha|$ **Λάθος !**

Το σωστό είναι $-|-\alpha| = -|\alpha|$

5.

Χρήσιμες ισοδυναμίες

i) $x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow |x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

ii) $x^2 < \alpha^2 \Leftrightarrow |x| < |\alpha| \Leftrightarrow -|\alpha| < x < |\alpha|$

iii) $x^2 > \alpha^2 \Leftrightarrow |x| > |\alpha| \Leftrightarrow x < -|\alpha|$ ή $x > |\alpha|$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

i) Γράψε έναν αριθμό, του οποίου η απόλυτη τιμή ισούται με τον εαυτό του.

ii) Γράψε έναν αριθμό, του οποίου η απόλυτη τιμή ισούται με τον αντίθετό του

iii) Γράψε μια παράσταση, της οποίας η απόλυτη τιμή ισούται με τον εαυτό της

iv) Γράψε μια παράσταση, της οποίας η απόλυτη τιμή ισούται με την αντίθετή της.

Απάντηση

4, -5, $(x-1)^2$, $-(x-1)^2$

Σχόλιο 1

2.

Για ποιες τιμές του x ισχύει
i) $|x| = x$
ii) $|x| = -x$
iii) $|x-2| = x-2$
iv) $|x-2| = -(x-2)$

Απάντηση

i) Πρέπει $x \geq 0$

Σχόλιο 1

ii) Πρέπει $x \leq 0$

iii) Πρέπει $x - 2 \geq 0$, δηλαδή $x \geq 2$

iv) Πρέπει $x - 2 \leq 0$, δηλαδή $x \leq 2$

3.

Χαρακτηρίστε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις προτάσεις

$|6| > 0$ …………………… Σ Λ

$|-7| < 0$ ………………… Σ Λ

$|2| \geq 2$ ………………… Σ Λ

$|2| > 2$ …………………… Σ Λ

$|-2| \geq 2$ ………………… Σ Λ

$|-4| \geq 4$ ……………………Σ Λ

$|4| \geq 4$ ………………………Σ Λ

$|-4| \geq -4$ ………………… Σ Λ

Ιδιότητες σχ. Βιβλίου

Απάντηση

Σ, Λ, Σ, Λ, Σ, Σ, Σ, Σ

4.

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του x , η παράσταση $\Pi = |x-2|-1$ να γραφεί χωρίς απόλυτες τιμές .

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $x - 2 < 0$, δηλαδή όταν $x < 2$
  η παράσταση γίνεται $\Pi = -(x-2) - 1 = -x + 2 - 1 = -x + 1$

- Όταν $x - 2 \geq 0$, δηλαδή όταν $x \geq 2$
  η παράσταση γίνεται $\Pi = (x-2) - 1 = x - 2 - 1 = x - 3$

5.

Αν $\left|\dfrac{3x+1}{x+3}\right| = 1$ και $x + 3 \neq 0$, να αποδείξετε ότι $|x| = 1$

Προτεινόμενη λύση

$$\left|\frac{3x+1}{x+3}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|3x+1|}{|x+3|} = 1$$

$$|3x+1| = |x+3|$$

$$|3x+1|^2 = |x+3|^2$$

$$(3x+1)^2 = (x+3)^2$$

$$9x^2 + 6x + 1 = x^2 + 6x + 9$$

$$8x^2 = 8$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow |x| = 1$$

Η ύψωση των δύο θετικών μελών στο τετράγωνο απο-τελεί μέθοδο

Σχόλιο 6

6.

Αν $\left|\dfrac{3x+1}{x+3}\right| < 1$ και $x + 3 \neq 0$, να αποδείξετε ότι $|x| < 1$

Προτεινόμενη λύση

$$\left|\frac{3x+1}{x+3}\right| < 1 \Rightarrow \frac{|3x+1|}{|x+3|} < 1$$

$$|3x+1| < |x+3|$$

$$|3x+1|^2 < |x+3|^2$$

$$(3x+1)^2 < (x+3)^2$$

$$9x^2 + 6x + 1 < x^2 + 6x + 9$$

$$8x^2 < 8$$

$$x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$$

Η ύψωση των δύο θετικών μελών στο τετράγωνο απο-τελεί μέθοδο

Σχόλιο 6

7.

Αν $\left|\dfrac{3\alpha+\beta}{\alpha+3\beta}\right| < 1$ και $\alpha + 3\beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι $|\alpha| < |\beta|$

Προτεινόμενη λύση

$$\left|\frac{3\alpha+\beta}{\alpha+3\beta}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|3\alpha+\beta|}{|\alpha+3\beta|} < 1$$

$$|3\alpha+\beta| < |\alpha+3\beta|$$

$$|3\alpha+\beta|^2 < |\alpha+3\beta|^2$$

$$(3\alpha+\beta)^2 < (\alpha+3\beta)^2$$

$$9\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2 < \alpha^2+6\alpha\beta+9\beta^2$$

$$8\alpha^2 < 8\beta^2$$

$$\alpha^2 < \beta^2$$

$$|\alpha| < |\beta|$$

Η ύψωση των δύο θετικών μελών στο τετράγωνο αποτελεί μέθοδο

Σχόλιο 6

8.
Αν $xy \neq 0$, να αποδείξετε την ισοδυναμία:

i) $|x+y| = |x| + |y| \iff x, y$ ομόσημοι.

ii) $||x| - |y|| = |x+y| \iff x, y$ ετερόσημοι.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$|x+y| = |x| + |y| \iff |x+y|^2 = (\,|x| + |y|\,)^2$$

$$(x+y)^2 = |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|xy| + y^2$$

$$2xy = 2|xy|$$

$$|xy| = xy$$

$$xy > 0 \iff x, y \text{ ομόσημοι}$$

Η ύψωση των δύο θετικών μελών στο τετράγωνο αποτελεί μέθοδο

ii)

$$||x| - |y|| = |x+y| \iff ||x| - |y||^2 = |x+y|^2$$

$$(\,|x| - |y|\,)^2 = (x+y)^2$$

$$|x|^2 - 2|x|\,|y| + |y|^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 - 2|xy| + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$-2|xy| = 2xy$$

$$|xy| = -(xy) \iff x, y \text{ ετερόσημοι}$$

9.

Αν $xy \neq 0$, να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$|x+y| > |x-y| \quad \Leftrightarrow \quad x, y$ ομόσημοι.

Προτεινόμενη λύση

$$
\begin{aligned}
|x+y| > |x-y| \quad \Leftrightarrow \quad & |x+y|^2 > |x-y|^2 \\
& (x+y)^2 > (x-y)^2 \\
& x^2 + 2xy + y^2 > x^2 - 2xy + y^2 \\
& 4xy > 0 \\
& xy > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x, y \text{ ομόσημοι.}
\end{aligned}
$$

10.

Να αποδείξετε ότι $|\alpha+\beta+\gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$

Λύση

$|\alpha+\beta+\gamma| = |(\alpha+\beta)+\gamma| \leq |\alpha+\beta| + |\gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$

11.

Να αποδείξετε την τριγωνική ανισότητα $\big||\alpha|-|\beta|\big| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha|+|\beta|$.

Προτεινόμενη λύση

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$ **(1)**

Όπου β θέτουμε $-\beta$, οπότε $|\alpha-\beta| \le |\alpha| + |-\beta|$

$|\alpha-\beta| \le |\alpha| + |\beta|$ **(2)**

Η ύψωση των δύο θετικών μελών στο τετράγωνο αποτελεί μέθοδο

Για την $\big||\alpha|-|\beta|\big| \le |\alpha+\beta|$ **(3)**

$$\big||\alpha|-|\beta|\big| \le |\alpha+\beta| \iff \big||\alpha|-|\beta|\big|^2 \le |\alpha+\beta|^2$$

$$(|\alpha|-|\beta|)^2 \le (\alpha+\beta)^2$$

$$|\alpha|^2 - 2|\alpha|\,|\beta| + |\beta|^2 \le \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - 2|\alpha\beta| + \beta^2 \le \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$-2|\alpha\beta| \le 2\alpha\beta$$

$$|\alpha\beta| \ge -(\alpha\beta) \quad \text{που ισχύει}$$

Στην (3), όπου β θέτουμε $-\beta$, οπότε $\big||\alpha|-|-\beta|\big| \le |\alpha-\beta|$ $\boxed{-|-\beta| = -|\beta|}$

$\big||\alpha|-|\beta|\big| \le |\alpha-\beta|$ **(4)**

Από τις (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow$ $\big||\alpha|-|\beta|\big| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha|+|\beta|$